Ojlerova metoda rješavanja homogenog sistema dif. jedn. sa konstantnim koeficijentima

U ovoj lekciji rješavamo homogeni sistem diferencijalnih jednačina oblika

$$\frac{dY}{dx} = AY$$

Matricu A nazivamo matrica sistema.

Ono što je u rješavanju zadataka bitno je da razlikujemo oblik rješenja, karakteristične jednačine $\det(A-\lambda I)=0$

1. svi korijeni su različiti
2. korjen λ_j je kompleksan broj
3. korjen λ_j je reda m $(1 < m \leq n)$

U zadacima koji slijede objasnićemo kako se rješava svaki od ovih slučajeva.

(#) Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$Y'_x = Z$$
$$Z'_x = Y$$

Rj. Trebamo odrediti f-je $Z = Z(x)$ i $Y = Y(x)$. Rješenje tražimo u obliku $Y = Ae^{\lambda x}$, $Z = Be^{\lambda x}$.

Uvrštavajući izraze za Y, Z, Y', Z' u sistem dobijamo ($Y'_x = \lambda A e^{\lambda x}$, $Z'_x = \lambda B e^{\lambda x}$):

$$\lambda A e^{\lambda x} = B e^{\lambda x} \quad /: e^{\lambda x}$$
$$\lambda B e^{\lambda x} = A e^{\lambda x} \quad /: e^{\lambda x}$$

$$\lambda A - B = 0$$
$$-A + \lambda B = 0$$

Determinanta ovog sistema je $\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$

$\lambda^2 - 1 = 0$ za $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

a) za $\lambda_1 = 1$ imamo

$$A - B = 0$$
$$-A + B = 0$$
$$A = B$$

Dakle, rješenje sistema je $Y = Ae^x$, $Z = Ae^x$, pri čemu je A proizvoljna konstanta. Ako stavimo $A=1$, tako dobijamo (biramo) rješenje

$$Y_1 = e^x, \quad Z_1 = e^x.$$

b) Za korijen $\lambda_2 = -1$ imamo

$$\begin{array}{l} -A-B=0 \\ -A-B=0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow B=-A$$

Ako izaberemo $A=1$, onda dobijamo rješenje

$$Y_2 = e^{-x}, \quad Z_2 = -e^{-x}$$

koje odgovara korijenu $\lambda_2 = -1$.

Trebamo provjeriti još da li su rješenja (Y_1, Z_1) i (Y_2, Z_2) linearno nezavisna.

Da li postoje konstante α, β, bar jedna različita od nule, takve da

$$\alpha (Y_1, Z_1) + \beta (Y_2, Z_2) = 0$$

$$\begin{array}{l} \alpha Y_1 + \beta Y_2 = 0 \\ \alpha Z_1 + \beta Z_2 = 0 \\ \hline \alpha e^x + \beta e^{-x} \\ \alpha e^x - \beta e^{-x} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{2x} - 1 \neq 0$$

Rješenja (Y_1, Z_1) i (Y_2, Z_2) su linearno nezavisna, pa je

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$Z = C_1 Z_1 + C_2 Z_2 = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

opšte rješenje sistema.

Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\dot{x} = 4x - y$$

$$\dot{y} = 3x + y - z$$

$$\dot{z} = x + z$$

Rj:

Dat je homogen sistem linearnih jednačina i neka je t nezavisna promenjiva. Matrica sistema je

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenja homogenog sistema su oblika $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$, $z = Ce^{\lambda t}$. Ako ovo uvrstimo u dati sistem poslije djeljenja sa $e^{\lambda t}$ i prebacivanja svih nepoznatih na jednu stranu, dobijamo

$$(4-\lambda)A - B = 0$$

$$3A + (1-\lambda)B - C = 0$$

$$A + (1-\lambda)C = 0$$

Odredimo A, B i C,

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{II_v + III_v}{=\!=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{II_v + I_v}{=\!=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 8-\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\overset{I_k + II_k \cdot 2}{=\!=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 8-3\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_k + III_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 8-4\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 2-\lambda & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -\lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow[(2-\lambda)]{II_k + I_k}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4-\lambda & -\lambda \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -\lambda \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{I_k + II_k} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-2\lambda & -\lambda \\ 2-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2(2-\lambda) & -\lambda \\ 2-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{2-2\lambda+\lambda} = (2-\lambda)^3$$

Kako smo dobili višestruki korijen, rješenje tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix} P_k(t) \\ Q_k(t) \\ R_k(t) \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}$$

gdje su P_k, Q_k, i R_k polinomi reda k, a $k = r + s - n$, gdje je:

- r rang matrice $A - \lambda I$ $(=?)$
- s višestrukost korijena $(=3)$
- n red sistema $(=3)$

$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3-2}{6}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{II_v:3}{\overset{I_v:2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{III_v - I_v}{\overset{II_v - I_v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \overset{II_v \cdot 3}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \overset{III_v - II_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A - \lambda I) = 2$$

$$k = 2 + 3 - 3 = 2$$

P_k, Q_k i R_k su polinomi drugog reda oblika

$$P_2(t) = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

$$Q_2(t) = B_2 t^2 + B_1 t + B_0 \qquad R_2(t) = C_2 t^2 + C_1 t + C_0$$

gdje ćemo koeficijente ovih polinoma odrediti iz uslova da f-je

$$x = P_2(t)e^{2t}, \quad y = Q_2(t)e^{2t}, \quad z = R_2(t)e^{2t} \quad \ldots (1)$$

budu rješenja datog sistema.

Ako (1) zamjenimo u jednačine sistema, poslije dijeljenja sa e^{2t} dobićemo

(kako je
$$\dot{x} = (\underline{2A_2t} + A_1)e^{2t} + (A_2t^2 + \underline{A_1t} + A_0)e^{2t}\cdot 2$$
$$\dot{y} = (\underline{2B_2t} + B_1)e^{2t} + (B_2t^2 + \underline{B_1t} + B_0)e^{2t}\cdot 2$$
$$\dot{z} = (\underline{2C_2t} + C_1)e^{2t} + (C_2t^2 + \underline{C_1t} + C_0)e^{2t}\cdot 2 \;)$$

$$2A_2t^2 + \underline{(2A_2 + 2A_1)}t + A_1 + 2A_0 = (4A_2 - B_2)t^2 + \underline{(4A_1 - B_1)}t + 4A_0 - B_0$$
$$2B_2t^2 + \underline{(2B_2 + B_1)}t + B_1 + 2B_0 = (3A_2 + B_2 - C_2)t^2 + \underline{(3A_1 + B_1 - C_1)}t + 3A_0 + B_0 - C_0$$
$$\underline{2C_2}t^2 + (2C_2 + 2C_1)t + C_1 + 2C_0 = \underline{(A_2 + C_2)}t^2 + (A_1 + C_1)t + (A_0 + C_0)$$

iz čega slijedi

$$2A_2 - B_2 = 0 \qquad 3A_2 - B_2 - C_2 = 0$$
$$-2A_2 + 2A_1 - B_1 = 0 \qquad 3A_1 - 2B_2 - C_1 = 0$$
$$-A_1 + 2A_0 - B_0 = 0 \qquad -B_1 + 3A_0 - B_0 - C_0 = 0$$

$$A_2 - C_2 = 0$$
$$A_1 - 2C_2 - C_1 = 0$$
$$-C_1 + A_0 - C_0 = 0$$

devet homogenih jednačina sa devet nepoznatih

Ako stavimo da je $A_0 = D_1$, $A_1 = D_2$ i $A_2 = D_3$ gdje su

D_1, D_2 i D_3 proizvoljne konstante dobićemo da je

$$B_0 = 2D_1 - D_2$$

$$B_1 = 2D_2 - 2D_3$$

$$B_2 = 2D_3$$

$$C_2 = 3D_3 - 2D_3 = D_3$$

$$C_1 = A_1 - 2C_2 = D_2 - 2D_3$$

$$C_0 = A_0 - C_1 = D_1 - D_2 + 2D_3$$

Opšte rješenje sistema je

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 + D_2 t + D_3 t^2 \\ 2D_1 - D_2 + (2D_2 - 2D_3) t + 2D_3 t^2 \\ D_1 - D_2 + 2D_3 + (D_2 - 2D_3) t + D_3 t^2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Riješiti sistem jednačina

$$\frac{dx}{dt} - y - z = 0$$

$$\frac{dy}{dt} - x - z = 0$$

$$\frac{dz}{dt} - x - y = 0$$

Rješenje:

Rješenje sistema tražimo u obliku

$$x = A_1 e^{\lambda t}, \quad y = A_2 e^{\lambda t}, \quad z = A_3 e^{\lambda t} \qquad \ldots (*)$$

pri čemu nepoznate konstante A_1, A_2, A_3 i λ treba odrediti.

Napišimo sistem u drugačijem obliku

$$\dot{x} - y - z = 0$$

$$-x + \dot{y} - z = 0$$

$$-x - y + \dot{z} = 0$$

Uvrštavajući $(*)$ u sistem dobijamo

$$\lambda A_1 e^{\lambda t} - A_2 e^{\lambda t} - A_3 e^{\lambda t} = 0 \qquad /: e^{\lambda t}$$

$$-A_1 e^{\lambda t} + \lambda A_2 e^{\lambda t} - A_3 e^{\lambda t} = 0 \qquad /: e^{\lambda t}$$

$$-A_1 e^{\lambda t} - A_2 e^{\lambda t} + \lambda A_3 e^{\lambda t} = 0 \qquad /: e^{\lambda t}$$

Karakteristična jednačina sistema je

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

i ima korijene $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -1$ $\left(m(-1) = 2 \right)$.

$m(-1) \rightarrow$ višestrukost korijena (-1)

a) za $\lambda_1=2$ imamo

$$2A_1 - A_2 - A_3 = 0$$
$$-A_1 + 2A_2 - A_3 = 0$$
$$-A_1 - A_2 + 2A_3 = 0$$

(prisjetimo se Kroneker-Kapelijeve metode za rješavanje sistem lin. jedn.)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{I_v + III_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{III_v + I_v}{\overset{II_v + I_v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{II_v : 3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} A_1 + A_2 - 2A_3 &= 0 \\ A_2 - A_3 &= 0 \end{aligned} \qquad A_2 = A_3 \Rightarrow A_1 = A_3$$

gdje je A_3 proizvoljna konstanta.

Ako za A_3 uzmemo 1 imamo

$$x_1 = e^{2t}, \quad y_1 = e^{2t}, \quad z_1 = e^{2t}.$$

b) Za $\lambda = -1$, kako je višestrukost $m(-1)=2$, rješenja koja odgovaraju ovom korijenu tražimo u obliku

$$x = (At + B)e^{-t}, \quad y = (Ct + D)e^{-t}, \quad z = (Et + F)e^{-t}$$

Uvrštavajući izraze za x, y, z, x', y', z' u sistem, dobijamo šest uslova iz kojih treba da odredimo koeficijente A, B, C, D, E i F.

$$Ae^{-t} - (At+B)e^{-t} - (Ct+D)e^{-t} - (Et+F)e^{-t} = 0$$
$$-(At+B)e^{-t} + Ce^{-t} - (Ct+D)e^{-t} - (Et+F)e^{-t} = 0$$
$$-(At+B)e^{-t} - (Ct+D)e^{-t} + Ee^{-t} - (Et+F)e^{-t} = 0$$

$$-A-C-E=0$$
$$A-B-D-F=0$$
$$-A-C-E=0$$
$$-B+C-D-F=0$$
$$-A-C-E=0$$
$$-B-D+E-F=0$$

U stvari, od šest dobijenih uslova, samo su četri međusobno različita (nezavisna) i to

$$\begin{aligned}
A \quad\;\; +C \quad\;\; +E \quad\;\; &=0\\
A-B \quad\;\; -D \quad\;\; -F &=0\\
-B+C-D \quad\;\; -F &=0\\
-B \quad\;\; -D+E-F &=0
\end{aligned}$$

Rješimo ovaj sistem Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0
\end{array}\right]
\overset{II_v-I_v}{\sim}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0\\
0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0
\end{array}\right]
\overset{II_v\cdot(-1)}{\sim}$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0
\end{array}\right]
\underset{IV_v+II_v}{\overset{III_v+II_v}{\sim}}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0
\end{array}\right]
\overset{III_v:2}{\sim}$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0
\end{array}\right]
\overset{IV_v-III_v}{\sim}$$

$$\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Ovim smo dobili da je rang proširene matrice 4, a kako imamo 6 nepoznatih, dvije promjenjive uzimamo proizvoljno. Također smo dobili:

$$\begin{aligned} A + C + E &= 0 \\ B + C + D + E + F &= 0 \\ C + \tfrac{1}{2} E &= 0 \\ \tfrac{3}{2} E &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow A = 0 \qquad \Rightarrow C = 0,\ E = 0$$

$$B + D + F = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -D - F$$

gdje promjenjive D i F možemo uzeti proizvoljno. Time je

$$x = (-D-F)e^{-t}, \quad y = De^{-t}, \quad z = Fe^{-t}$$

Ako stavimo da je $D = -1$, $F = 0$ dobijemo

$$x_2 = e^{-t}, \quad y_2 = -e^{-t}, \quad z_2 = 0$$

Ako stavimo da je $D = 0$, $F = -1$ dobijemo

$$x_2 = e^{-t}, \quad y = 0, \quad z_3 = -e^{-t}$$

Rješenja, (vektori), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) su linearno nezavisna, pa je opće rješenje sistema trojka (vektor) (x, y, z) pri čemu je

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-t}$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_2 y_3 = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t}$$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 = C_1 e^{2t} - C_3 e^{-t}$$

Sada ćemo riješiti sistem čija karakteristična jednačina ima imaginarne korijene.

(#) Riješiti sistem

$$\frac{dy}{dx} = -7y + z$$

$$\frac{dz}{dx} = -2y - 5z$$

Rj. Dati sistem je homogeni sistem i rješenje tražimo u obliku

$$y = Ae^{\lambda x}, \quad z = Be^{\lambda x}. \qquad \dots (1)$$

Sistem možemo napisati u drugačijem obliku

$$y'_x + 7y - z = 0$$
$$2y + z'_x + 5z = 0$$

Kako je $\overset{(iz\ (1))}{y'_x} = \lambda A e^{\lambda x}$, $z'_x = \lambda B e^{\lambda x}$ uvrštavajući (1) u sistem imamo

$$\lambda A e^{\lambda x} + 7A e^{\lambda x} - B e^{\lambda x} = 0 \quad /: e^{\lambda x}$$
$$2Ae^{\lambda x} + \lambda B e^{\lambda x} + 5Be^{\lambda x} = 0 \quad /: e^{\lambda x}$$

$$(\lambda+7)A - B = 0$$
$$2A + (\lambda+5)B = 0$$

čime dolazimo do karakteristične jednačine

$$\begin{vmatrix} \lambda+7 & -1 \\ 2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{tj.} \quad \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$$

$$\lambda_1 = -6 + i$$

$$\lambda_2 = -6 - i$$

a) Za $\lambda_1 = -6+i$ imamo (koeficijente A i B određujemo iz sustava)

$$(1+i)A - B = 0$$
$$2A + (-1+i)B = 0$$

$$B = (1+i)A$$

Stavljajući $A=1$ dobijamo rješenje

$$Y_1 = e^{(-6+i)x}, \qquad Z_1 = (1+i)\, e^{(-6+i)x}$$

$$\left(Y_1 = e^{-6x}(\cos x + i \sin x) \qquad Z_1 = (1+i)e^{-6x}(\cos x + i\sin x) \right)$$

b) Za $\lambda_2 = -6-i$, na isti način, imamo

$$(1-i)A - B = 0$$
$$2A + (-1-i)B = 0$$

$$B = (1-i)A$$

$$Y_2 = e^{(-6-i)x}, \qquad Z_2 = (1-i)e^{(-6-i)x}$$

$$\Rightarrow \quad Y_2 = e^{-6x}(\cos x - i\sin x) \qquad Z_2 = (1-i)e^{-6x}(\cos x - i\sin x)$$

Paru ovih imaginarnih rješenja (Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2) možemo pridružiti par realnih rješenja. Stavimo

$$\tilde{Y}_1 = \frac{Y_1+Y_2}{2} = e^{-6x}\cos x, \qquad \tilde{Z}_1 = \frac{Z_1+Z_2}{2} = e^{-6x}(\cos x - \sin x)$$

$$\tilde{Y}_2 = \frac{Y_1-Y_2}{2i} = e^{-6x}\sin x, \qquad \tilde{Z}_2 = \frac{Z_1-Z_2}{2i} = e^{-6x}(\cos x + \sin x)$$

Tako dobijamo opće rješenje (Y, Z):

$$Y = C_1\tilde{Y}_1 + C_2\tilde{Y}_2 = e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x);$$

$$Z = C_1\tilde{Z}_1 + C_2\tilde{Z}_2 = e^{-6x}\left[(C_1+C_2)\cos x - (C_1-C_2)\sin x\right].$$

(#) Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\dot{x} = 2x + y - 2z$$
$$\dot{y} = -x$$
$$\dot{z} = x + y - z$$

gdje je $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$.

Rj. Dat je homogeni sistem linearnih jednačina (t je nezavisna promjenjiva). Matrica sistema je

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rješenja ovog sistema su oblika $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$, $z = Ce^{\lambda t}$. Ako ovo uvrstimo u dati sistem poslije djeljenja sa $e^{\lambda t}$ i malog sređivanja dobijamo

$$\begin{aligned} (2-\lambda)A + B - 2C &= 0 \\ -A - \lambda B &= 0 \\ A + B + (-1-\lambda)C &= 0 \end{aligned}$$

odredimo A, B i C.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_k + III_k}{\underset{III_k + II_k}{=\!=}} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda \end{vmatrix} \overset{I_k - III_k}{=\!=}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -\lambda & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \overset{II_v + I_v}{=\!=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda^2)$$

Karakteristična jednačina $(1-\lambda)(1+\lambda^2)=0$ ima korijene $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$, $\lambda_3=1$.

a) Za $\lambda_1=i$ sistem postaje

$$\begin{aligned}(2-i)A + B - 2C &= 0\\ -A - iB &= 0 \quad \Rightarrow A=-iB\\ A + B + (-1-i)C &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned}(2-i)(-iB)+B-2C&=0\\ -iB+B+(-1-i)C&=0\end{aligned}$$

$i^2=-1$

$-i^2=1$

$$\begin{aligned}(-1-2i+1)B-2C&=0\\ (-i+1)B+(-1-i)C&=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow 2C=-2iB \Rightarrow C=-iB$

Sistem ima ∞ mnogo rješenja i jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

Za $B=i$ imamo $A=1$, $B=i$, $C=1$

$x_1(t)=e^{it}$, $y_1(t)=ie^{it}$, $z_1(t)=e^{it}$

b) Za $\lambda_2=-i$ sistem postaje

$$\begin{aligned}(2+i)A + B - 2C &= 0\\ -A + iB &= 0 \quad \Rightarrow A=iB\\ A + B + (-1+i)C &= 0\end{aligned}$$

$(2+i)(iB)+B-2C=0$

$(2i+i^2+1)B-2C=0$

$2C=2iB$

$C=iB$

Za $B=-i$ imamo $A=1$, $C=1$

$x_2(t)=e^{-it}$, $Y_2(t)=-ie^{-it}$, $z_2(t)=e^{-it}$

c) $\lambda_3 = 1$ sistem postaje

$$\begin{aligned} A + B - 2C &= 0 \\ -A - B \quad &= 0 \Rightarrow B = -A \\ A + B - 2C &= 0 \end{aligned}$$

$$A + (-A) - 2C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Za tad: $x_3(t) = e^t$, $y_3(t) = -e^t$, $z_3(t) = 0$

Kako rješenje sistema želimo napisati u realnom obliku imaginarnim rješenjima $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ možemo pridružiti realna rješenja na sljedeći način:

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(\cos t + i \sin t + (\cos t - i \sin t)) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cos t = \cos t$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{1}{2i}(x_1 - x_2) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2i}(\cos t + i \sin t - (\cos t - i \sin t)) = \sin t$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(ie^{it} - ie^{-it}) = \frac{1}{2}(-\sin t + i \cos t - (\sin t + i \cos t)) = -\sin t$$

$$\tilde{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = \frac{1}{2i}(ie^{it} + ie^{-it}) = \frac{1}{2i}(-\sin t + i \cos t + \sin t + i \cos t) = \cos t$$

slično $\tilde{z}_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \cos t$, $\tilde{z}_2 = \frac{1}{2}(z_1 - z_2) = \sin t$

Opšte rješenje sistema je

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^t$$

$$y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - C_3 e^t$$

$$z(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

Primjetimo da je
$\tilde{x}_1 = Re(x_1)$
$\tilde{x}_2 = Im(x_1)$
$\tilde{y}_1 = Re(y_1)$
$\tilde{y}_2 = Im(y_1)$
$\tilde{z}_1 = Re(z_1)$
$\tilde{z}_2 = Im(z_1)$

Zadaci za vežbu

1. Riješiti dati sistem linearnih jednačina

a)
$$\dot{x} = 2x - y + z$$
$$\dot{y} = x + 2y - z$$
$$\dot{z} = x - y + 2z$$

b)
$$\dot{x} = x - y - z$$
$$\dot{y} = x + y$$
$$\dot{z} = 3x + z$$

c)
$$\dot{x} = 2x - y - z$$
$$\dot{y} = 2x - y - 2z$$
$$\dot{z} = -x + y + 2z$$

d)
$$\dot{x} = x - y$$
$$\dot{y} = y - 4x$$

e)
$$\dot{x} = x + z - y$$
$$\dot{y} = x + y - z$$
$$\dot{z} = 2x - y$$

f)
$$\dot{x} + 5x - 3y = 0$$
$$\dot{y} + 15x - 7y = 0$$

Rješenje – upute:

a) Karakteristični korijeni su $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

$$x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$$
$$y = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$$
$$z = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$$

b) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1+2i,\ \lambda_3 = 1-2i$

$$x = C_2 e^{t}\cos 2t + C_3 2e^{t}\sin 2t$$
$$y = C_1 e^{t} + C_2 e^{t}\sin 2t - C_3 e^{t}\cos 2t$$
$$z = -C_1 e^{t} + C_2 3e^{t}\sin 2t - C_3 3e^{t}\cos t$$

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$$x(t) = (-C_3 t + C_1)e^{t}$$
$$y(t) = (-2C_3 t + C_2)e^{t}$$
$$z(t) = (C_3 t + C_1 - C_2 + C_3)e^{t}$$

d)
$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$$
$$y = -2C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-t}$$

e)
$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} + C_3 e^{t}$$
$$y = C_2 e^{t} - 3C_3 e^{-t}$$
$$z = C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} - 5C_3 e^{-t}$$

f)
$$x = e^{t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$$
$$y = e^{t}\left((2C_1 + C_2)\cos 3t + (-C_1 + 2C_2)\sin 3t\right)$$